

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)=\text{συν}x$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $(\text{συν}x)' = -\eta\mu x$

**Μονάδες 10**

**A2.** Έστω μία συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της  $f$  στο  $\Delta$ .

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z=a+βi$ ,  $a,β \in \mathbb{R}$  ισχύει  $z-\bar{z}=2β$

**β)** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  (ολικό) μέγιστο το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ε) Κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z, w$ , οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \operatorname{Im}(z) \quad (1)$$

$$w(\bar{w} + 3i) = i(3\bar{w} + i) \quad (2)$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι η παραβολή με εξίσωση  $y = \frac{1}{4}x^2$

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $K(0,3)$  και ακτίνα  $\rho = 2\sqrt{2}$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε τα σημεία  $A$  και  $B$  του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών  $z, w$  με  $z = w$ .

**Μονάδες 5**

**B4.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $KAB$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό  $u$  με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο  $\Lambda$ ,

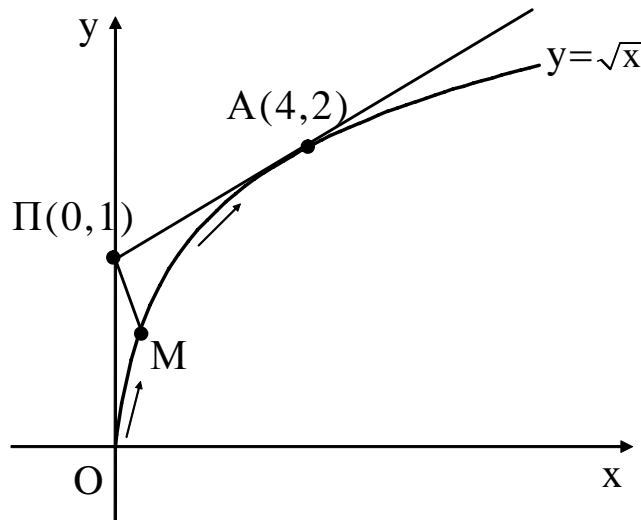
ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Α,Λ,Β να είναι τετράγωνο.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ . Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση  $\Pi(0,1)$  ενός συστήματος συντεταγμένων  $Oxy$  και παρατηρεί το κινητό από την αρχή  $O$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$  είναι  $x'(t) = 16 \text{ m/min}$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή  $t$ ,  $t \geq 0$  δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 16t$$

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το  $A(4,2)$  και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$ , κατά την οποία η απόσταση  $d=(ΠΜ)$  του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

**Μονάδες 8**

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων  $Oxy$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii)  $f'(0) < f(1) - f(0)$  και

iii)  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**Δ1.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0=0$ .

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

Αν επιπλέον  $g(x)=f(x)-x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{xg(x)}$

**Μονάδες 6**

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ4. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^2 f(x)dx > 2$

**Μονάδες 5**

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x=0$  και  $x=1$  είναι  $E(\Omega)=e-\frac{5}{2}$ , τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1,2)$  τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$$

**Μονάδες 6**

**ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ  
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ